

平成 31 年度入学試験問題（後期日程）

数 学

（中等教育教員養成課程 数学専攻）

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答紙は4枚（4の1，4の2，4の3，4の4）あります。
試験開始後，各解答紙の上部の2箇所を受験番号を記入しなさい。
また，計算紙にも受験番号を記入しなさい。
3. 解答はすべて解答紙の所定の解答欄に記入しなさい。解答紙の裏面に記入した解答は採点の対象になりませんので注意してください。
4. 定規，コンパスは使用できません。

[1] , [2] 1 ページ
[3] , [4] 2 ページ

[1] 次の問いに答えよ。

(問 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right)$ の値を求めよ。

(問 2) 長さ 2 の線分 AB の中点を M とする。PM = 3 を満たす点 P に対して、 $\vec{PA} \cdot \vec{PB}$ は一定の値であることを示し、その値を求めよ。ただし、 $\vec{PA} \cdot \vec{PB}$ は \vec{PA} と \vec{PB} の内積を表す。

(問 3) $(1-x)^{10} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{10}$ の展開式における x^7 の係数を求めよ。

[2] θ を実数とする。自然数 n に対して、複素数 z_n を

$$z_n = \sum_{k=0}^n 2^k (\cos \theta + i \sin \theta)^k$$

と定める。次の問いに答えよ。ただし、 i は虚数単位である。

(問 1) z_n の虚部は $\sum_{k=0}^n 2^k \sin k\theta$ であることを示せ。

(問 2) 等式

$$\frac{2^{n+2} \cos n\theta - 2^{n+1} \cos(n+1)\theta - 2 \cos \theta + 1}{5 - 4 \cos \theta} = \sum_{k=0}^n 2^k \cos k\theta$$

が成立することを示せ。

(問 3)

$$\sum_{k=0}^7 (-1 + \sqrt{3}i)^k$$

の実部を求めよ。

[3] a, b, c, d を有理数とする。次の問いに答えよ。

(問 1) $a + \sqrt{5}b = 0$ ならば $a = b = 0$ となることを示せ。ただし、 $\sqrt{5}$ が無理数であることを用いてもよい。

(問 2) $a^2 + b^2 \neq 0$ である a, b について $c + \sqrt{5}d$ が $a + \sqrt{5}b$ の逆数であるとき、 c, d を a, b を用いて表せ。

(問 3) (問 2) において a, b が整数であるとする。このとき、 c, d が整数になる必要十分条件は $|a^2 - 5b^2| = 1$ であることを示せ。

[4] a を正の定数とする。関数 $f(x) = ae^x$ と関数 $g(x) = x(1-x)$ について、実数 x_0 が存在し、

$$f(x_0) = g(x_0), \quad f'(x_0) = g'(x_0)$$

を満たすものとする。次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底とする。

(問 1) a および x_0 の値を求めよ。

(問 2) $f(x) = g(x)$ を満たす x は x_0 のみであることを示せ。

(問 3) b を正の定数とする。等式

$$\int_{\log b}^x h(t) dt = ae^x + x^2 - x$$

を満たす関数 $h(x)$ および b の値を求めよ。ただし、対数は自然対数とする。