

令和 7 年度入学試験問題（後期日程）

数 学

中等教育教員養成課程
中等教育プログラム 数学専攻

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答紙は 4 枚（4 の 1， 4 の 2， 4 の 3， 4 の 4）あります。
3. 試験開始後、各解答紙の受験番号欄に受験番号を記入しなさい。また、計算紙にも受験番号を記入しなさい。
4. 解答はすべて解答紙の所定の解答欄に記入しなさい。解答紙の裏面に記入した解答は採点の対象になりません。
5. 定規，コンパスは使用できません。

[1], [2]	1 ページ
[3], [4]	2 ページ

〔 1 〕 次の問いに答えよ。

(問 1) a を正の実数とする。複素数

$$z = \frac{(a + 3i)^2(1 + i)}{3i(a + i)^2}$$

が $|z| = \sqrt{2}$ を満たしている。 z を極形式で表せ。ただし、 i は虚数単位とする。

(問 2) 整式 $P(x)$ の係数はすべて整数であり、 $P(x)$ を $x(x+2)$ 、 x^2-1 で割ったときの余りはそれぞれ $x-2$ 、 $3x-1$ である。また、 $P(x)$ を $x(x+1)$ で割ったときの商の係数もすべて整数である。このとき、次の (ア)、(イ) に答えよ。

(ア) $P(x)$ を $x(x+1)$ で割ったときの余りを求めよ。

(イ) n が整数で $P(n)$ が素数ならば $P(n) = 2$ が成り立つことを示せ。

(問 3) 関数 $y = x \cos 2x$ の第 n 次導関数 $y^{(n)}$ について

$$y^{(n)} = n2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{n-1}{2}\pi\right) + 2^n x \cos\left(2x + \frac{n}{2}\pi\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことを n に関する数学的帰納法で示せ。

〔 2 〕 実数 x 、 y に関する次の条件 p を考える。

$$p: \log_2(x-y)^2 \leq 2 \text{ かつ } 2x^2 + 5xy - 3y^2 \leq 0$$

次の問いに答えよ。

(問 1) 条件 p を満たす実数 x 、 y を座標とする点 (x, y) の存在する範囲を図示せよ。

(問 2) a を正の実数とし、実数 x 、 y に関する次の条件 q を考える。

$$q: (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq a^2$$

命題「 p ならば q 」が真となるような a のとり得る値の範囲を求めよ。

- 〔3〕 $\triangle OAB$ において、辺 OA を $3:2$ に内分する点を C とし、辺 OB を $9:4$ に外分する点を D とする。点 E を

$$EC \perp OA, \quad ED \perp OB$$

を満たすようにとる。また、 $OA = \sqrt{5}$, $OB = 1$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -1$ とする。
次の問いに答えよ。ただし、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ は $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積である。

- (問1) $\overrightarrow{OE}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。
(問2) $\cos \angle AEB$ の値を求めよ。
(問3) 4点 O, A, B, E は同一円周上にあることを示せ。

- 〔4〕 次の各問いに答えよ。

- (問1) 方程式 $x^3 + 4x^2 + 2 = 0$ の実数解はただ一つであり、その実数解 α は $-5 < \alpha < -4$ を満たすことを示せ。
(問2) 関数 $y = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 4x^2 + 2}$ の極値を求めよ。
(問3) a を正の定数とする。方程式

$$x^2 + 1 = \int_0^{\sqrt{a}} \frac{tx^3 + 4tx^2 + 2t}{t^2 + 1} dt$$

の異なる実数解の個数を求めよ。