令和３年度入学試験問題（一般選抜：追試験）

数　　　　　学

（中等教育教員養成課程　数学専攻）

注意事項

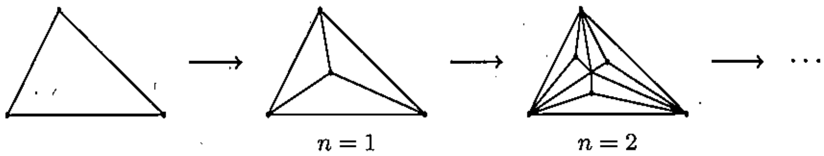
1. **試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**
2. 解答紙は４枚（４の１，４の２，４の３，４の４）あります。
3. 試験開始後，各解答紙の上部の２箇所に受験番号を記入しなさい。また，計算紙にも受験番号を記入しなさい。
4. 解答はすべて解答紙の所定の解答欄に記入しなさい。**解答紙の裏面に記入した解答は採点の対象になりませんので注意してください。**
5. 定規，コンパスは使用できません。

〔1〕　次の問いに答えよ。

（問1）　2 直線 $2x-3y+6=0$，$3x-2y=0$ のなす角を 2 等分する直線の方程式を求めよ。

（問2）　A，B，C，P は平面上の点で $AB=3$，$AC=4$，$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ をみたし，$\triangle PBC$ の面積は 1 である。$\sin\angle BAC$ の値を求めよ。

（問3）　下の図のように，三角形の内部の点を 1 つ選び，その点と各頂点を線分で結んで小さな三角形に分割する。次に，各三角形の内部の点を 1 つずつ選び，その点と各頂点を線分で結んで小さな三角形に分割する。この操作を n 回繰り返したときにできる小さな三角形の数，いずれかの小さな三角形の辺になる線分の数，いずれかの小さな三角形の頂点になる点の数をそれぞれ f_n，e_n，v_n とする。例えば，$f_1=3$，$e_1=6$，$v_1=4$，$f_2=9$，$e_2=15$，$v_2=7$ である。すべての自然数 n について $v_n-e_n+f_n=1$ が成り立つことを示せ。



〔2〕　数列 $\{a_n\}$ は $a_1=1$，$a_n\neq 0$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ をみたす。また，2 次方程式 $a_nx^2-a_{n+1}x+1=0$ の解 α_n，β_n が

$$3\alpha_n+(-1)^n\alpha_n\beta_n+3\beta_n=1$$

をみたしている。次の問いに答えよ。

（問1）　$b_n=3^na_n$ とおく。b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

（問2）　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

（問3）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}a_k$ の値を求めよ。

〔３〕　次の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位を表す。

（問１）　z_0，u，v を異なる３つの複素数とする。複素数平面において点 u，v を点 z_0 を中心に角 θ だけ回転した点をそれぞれ u'，v' とする。このとき，２点 u'，v' 間の距離と u，v 間の距離が等しいことを示せ。

（問２）　$\alpha = \sqrt{3} + i$，$\beta = (\sqrt{3}+1)(1+i)$，$\gamma = 2\sqrt{3} + 2i$ とする。複素数平面において点 α，β，γ を点 $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ を中心に $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点をそれぞれ α'，β'，γ' とする。また，α の共役複素数 $\overline{\alpha}$ が表す点を点 $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ を中心に $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点を w とする。複素数 α，β，γ，α'，β'，γ'，w が表す点をそれぞれ A，B，C，A$'$，B$'$，C$'$，D$'$ とする。次の（ア），（イ），（ウ）に答えよ。

（ア）　$\triangle$ABC の内角 $\angle$CAB の大きさを求めよ。

（イ）　$\triangle$A$'$B$'$C$'$ の面積を求めよ。

（ウ）　複素数 z が表す点を P としたとき $\triangle$A$'$D$'$P が正三角形になるような z をすべて求めよ。

〔４〕　関数 $y = 2\cos 3x - 3\cos 2x - 6\cos x \ (0 \leqq x \leqq \pi)$ は $x = a$ において最大値 M をとり，$x = b$ において最小値 m をとる。次の問いに答えよ。

（問１）　$t = \cos x$ とおいたとき，$\cos 3x$ を t を用いて表せ。

（問２）　M および m の値を求めよ。

（問３）　$\displaystyle\int_a^b (2\cos 3x - 3\cos 2x - 6\cos x)\sin x\,dx$ の値を求めよ。