

2. 研究の詳細

プロジェクト名	文化的目的の実現を目指す算数科の授業デザイン・実践に関する研究		
プロジェクト期間	平成 28 年度		
申請代表者 (所属講座等)	今井 一仁 (数学教育講座)	共同研究者 (所属講座等)	Wee Tiong Seah (University of Melbourne) 櫻井佑樹 (久留米市立犬塚小学校) 高田知美 (大野城市立平野小学校) 田中智宏 (久留米市立田主丸小学校)
<p>1. 研究の目的</p> <p>本プロジェクトは、文化的目的 (長崎, 2010, p.25) の実現を目指した算数科の授業をデザイン・実践することを目的としたものである。具体的には、円周率に関する文化的価値 (よさ) の 1 つとして考えられる「取り尽くし法」の考え方の有用性に児童が気づくことをねらいとした算数科の授業をデザイン・実践することを目的とした。</p> <p>2. 研究の内容</p> <p>① 授業デザインの理論的基盤に関する考察 — 状況的学習論の重要性 —</p> <p>教師が授業をデザイン・実践する際、指導内容の価値を明確に意識することが重要なのは言うまでもない。ところが、これまでの算数・数学科教育において、そうした価値を明確に意識した「授業構成論」の研究と実践が行われてきたとは言い難い。平林 (1993) は、こうした「目的・目標論」について十分な追求がなされていないところに、我が国の数学教育の重大な弱さがあると指摘している (p.25)。</p> <p>こうした状況の原因として、現在の算数・数学科の学習指導要領が、その内容や指導原理において「知識」に着目したものになっている (日本数学教育学会教育課程委員会, 2006) ことが考えられる。「知識」に注目して算数・数学科の授業をデザイン・実践する場合、一般的な状況で知識を活用できるようにしようという発想から、具体的・実証的な文脈から離れた抽象的・非実用的場面で知識を習得することが目指される (稲垣・波多野, 1998)。つまり、知識が実際に活用される場面を明確にする意識 (= 指導内容 (知識) の価値に対する意識) が希薄になるのである。この点に関連して、美馬・山内 (2005) は、教育内容から構成されたカリキュラムには学習者に学習の意味を提示することが難しいという欠点があり、そもそも教育活動を設計する際に、学習者にとっての意味が考えられてこなかった、と指摘している (pp.143-144)。</p> <p>これに対して、状況的学習論は「活動」に着目した学習観をもっている。「活動」に注目して算数・数学科の授業をデザイン・実践する場合、具体的・実証的な場面で数学的活動ができることが目指される。つまり、数学的活動が実際に行われる場面を明確にする意識 (= 指導内容 (活動) の価値に対する意識) が求められるのである。この点に関連して、美馬・山内 (2005) は、教育内容が持つ内在的な魅力を活動の形で表すことで、学習者はそれを学ぶ意味を見つけやすくなる、と指摘している (p.145)。</p> <p>このように、状況的学習論に基づいて算数・数学科の授業をデザイン・実践することによって、教師は指導内容の価値を明確に意識することが必然的に求められるのである。</p> <p>② 円周率に関する文化的価値 (よさ) の考察</p> <p>②-1 算数科の教科書における円周率の取り扱い</p> <p>現在の算数科の教科書 (6 社) における円周率の取り扱いについてまとめると、次のようになる。</p> <p>[学校図書] (一松ほか, 2015)</p> <p>まず、半径 2cm の円に内接する正六角形と外接する正方形のそれぞれの周の長さを用いて、(直径×3) < (円</p>			

周) < (直径×4)であることを調べる。次に、直径 4cm, 8cm, 12cm の円を 1 回転させて何 cm 進むかを調べて、直径の長さと円周の長さが比例していることを考える。最後に、円周の長さは直径の長さの約何倍になっているかを求め、「どんな大きさの円でも、円周÷直径は、決まった数になります。」として円周率を提示する。

〔教育出版〕(坪田・金本ほか, 2015)

いろいろな円の直径の長さと円周の長さを調べたあと、円周の長さが直径の長さの何倍になっているかを調べ、「どんな大きさの円でも、円周÷直径は同じ数になります。」として円周率を提示する。

〔啓林館〕(清水・船越・根上・寺垣内ほか, 2015)

まず、円に内接する正六角形の周の長さを用いて、円周は直径のおよそ何倍になっているかを調べる。次に、直径 4cm, 5cm, 6cm, 7cm, 8cm の円を転がして円周の長さを測り、円周は直径の何倍になっているかを調べる。最後に、「どんな大きさの円でも、円周÷直径は同じ数になります。」として、円周率を提示する。

〔大日本図書〕(橋本ほか, 2015)

まず、円に内接する正六角形と外接する正方形のそれぞれの周の長さを用いて(直径の長さの 3 倍) < (円周の長さ) < (直径の長さの 4 倍)であることを調べる。次に、直径 5cm の円・調べたい大きさの円の円周の長さを、円に巻いたひもで測ったり、円を転がして測ったりして、円周の長さが直径の長さの何倍になっているか計算する。最後に、「どんな大きさの円でも、円周の長さは直径の長さの 3.14 倍になっています。」として、円周率を提示する。

〔東京書籍〕(藤井ほか, 2015)

まず、直径 10cm の円に内接する正六角形と外接する正方形のそれぞれの周の長さを用いて、「円周の長さは、直径の長さの 3 倍より少し長く、4 倍より短くなっています。」とする。次に、直径 10cm の円に内接する正十二角形の周の長さを実際に測って、「円周の長さは、直径の長さの約 3.1 倍になっています。」とする。また、円の形をした色々なものの直径と円周の長さを測って、円周の長さは直径の長さの何倍になっているかを求める。最後に、「どんな大きさの円も、直径と円周の長さの割合は等しくなっています。」として円周率を提示する。

〔日本文教出版〕(小山ほか, 2015)

まず、円に内接する正六角形と外接する正方形のそれぞれの周の長さを用いて、「円周の長さは、円の直径の長さの 3 倍より長く、4 倍より短くなっていることがわかります。」とする。次に、円周の長さは直径の長さの何倍になっているかを、円の形をした色々なものの直径の長ささと円周の長さを測って調べる。最後に、「円周の長さが直径の長さの何倍になっているかを表す数を、円周率といいます。」として円周率を提示する。

②-2 円周率を計算する方法の歴史

「②-1 算数科の教科書における円周率の取り扱い」を踏まえて、正多角形の周の長さを用いて円周率を計算する方法の歴史を概観する(上野(2013), 竹之内・伊藤(2007), 中村(2013), 野崎(2011)を参考)。

内接する正多角形と外接する正多角形の周の長ささと円周を比較することにより π の値を求めたのは、アルキメデスである。アルキメデスは、内接する正六角形の周の長さから始め、 $3 < \pi$ という不等式を得た。また、外接する正六角形の周の長さから $\pi < 2\sqrt{3}$ という不等式を得た。これによって、円周率の値の範囲が定まったことになる。更に、アルキメデスは、正六角形の各辺の中心角を半分にしていくことを考え、正 96 角形の周

の長さから、 $\frac{221}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ という不等式を得た。この方法はその後、2000 年近くもの間、円周率の値を

科学的に扱う唯一の方法であり続けたのである。

②-3 数学のよさ

数学のよさを捉える場合、「何によさがあるのか」と「どのようなよさがあるのか」という 2 つの視点から考えることができる(文部省, 1999, p.19)。前者に関しては、知識及び技能、数学的な思考・判断・表現等に含ま

れるよさがある。後者に関しては、有用性、簡潔性、一般性、正確性、能率性、発展性、美しさなどが考えられる（文部科学省, 2008, p.22）。

②-4 円周率に関する文化的価値（よさ）

「②-2 円周率を計算する方法の歴史」と「②-3 数学のよさ」を踏まえ、本プロジェクトでは、「円に内接（外接）する正多角形を考え、その頂点の数を増やしていくことによって、正多角形の周の長さは円周の長さに近づいていく」という、アルキメデスの『取り尽くし法』という考え方の有用性」に焦点を当てた算数科の授業をデザイン・実践することにした。

③ 円周率に関する文化的価値（よさ）に気づく算数科の授業のデザイン・実践

児童が「取り尽くし法」という考え方の有用性に気づくことをねらいとした算数科の授業をデザインした（別紙「第5学年2組 算数科学習指導案」参照）。また、平成29年2月24日（金）に、共同研究者（櫻井）が担任をするクラスで授業実践を行った。

3. 研究の方法・進め方

「2. 研究の内容」の「① 授業デザインの理論的基盤に関する考察 — 状況的学習論の重要性 —」と「② 円周率に関する文化的価値（よさ）の考察」は、文献解釈的方法により、認識論・学習論の観点からの考察、教科書比較、数学史の概観等を行った。それに関連して、価値（value）研究における本研究の位置づけについて、共同研究者（Seah）と検討を行った。「③ 円周率に関する文化的価値（よさ）に気づく算数科の授業のデザイン・実践」であるが、授業デザインについては、まず、申請代表者（今井）が算数科学習指導案を作成し、それをもとに、共同研究者（櫻井）と検討を重ねた。授業実践については、共同研究者（櫻井）が授業を行い、申請代表者（今井）が授業の補助を行った。また、授業研究の方法により、ビデオテープで記録した授業実践の分析を、他の共同研究者（高田・田中）を含めて行った。

4. 実施体制

Wee Tion Seah：価値（value）研究における本研究の位置づけに関する検討

櫻井 佑樹：授業デザインの検討、授業実践、授業実践の事後検討

高田 知美：授業実践の事後検討

田中 智宏：授業実践の事後検討

5. 平成28年度実施による研究成果

「2. 研究の内容」の「① 授業デザインの理論的基盤に関する考察 — 状況的学習論の重要性 —」に関する研究成果として、状況的学習論に基づいて算数・数学科の授業をデザイン・実践することによって、教師は指導内容の価値を明確に意識することが必然的に求められることが示唆された点を挙げるができる。

「② 円周率に関する文化的価値（よさ）の考察」に関する研究成果として、「『取り尽くし法』という考え方の有用性」について、現在の算数科の教科書では、東京書籍の教科書（藤井ほか, 2015）以外では扱われていないことを指摘した点を挙げるができる。また、東京書籍の教科書であっても、「正多角形の頂点の数を増やす動機につなげる工夫が不十分であること」や「内接する正十二角形の周の長さを実測するのであれば、円の形をした色々なものの円周の長さを最初から実測したほうが、円周率のより正確な値を求めることができる」という点で検討の余地がある。

「③ 円周率に関する文化的価値（よさ）に気づく算数科の授業のデザイン・実践」に関する研究成果として、児童が「取り尽くし法」という考え方の有用性に気づくことをねらいとした算数科の授業をデザイン・実践し、

そのねらいを実現する可能性が示唆された点を挙げることができる。

6. 今後の予想される成果（学問的効果、社会的効果及び改善点・改善効果）

学問的効果として、授業デザインにおける状況的学習論の重要性を指摘し、算数科の授業をデザイン・実践したことによって、「目的・目標論」について十分な追求がなされていない（平林, 1993, p.25）我が国の算数・数学教育の現状を、理論的・実践的レベルで改善することにつながる可能性があることが考えられる。

社会的効果として、「各教科等をなぜ学ぶのか、それを通じてどういった力が身に付くのかという、教科等を学ぶ本質的な意義を明確にすることが必要になる。」（中央教育審議会, 2016, p.32）ということ踏まえた、これからの算数・数学科の授業の在り方の 1 つを例示したことが挙げられる。この成果を、大学での講義、教員を対象とした講演、研究発表会や校内研修会における指導助言、等の機会に提供することによって、現在と未来の授業改善に寄与することが期待できると考えられる。

7. 研究の今後の展望

今回デザイン・実践した算数科の授業で、児童が「取り尽くし法」という考え方の有用性に気づく可能性が示唆されたものの、全ての児童についてねらいが達成できたとは言えない。また、児童にとって難しい内容であることも示唆された。今後は、次の点について検討して授業デザインを修正し、その実践を行いたいと考えている。

- ① 児童が、円周の長さを「実測する方法」よりも「取り尽くし法」の方がよいと考えることができるか。
- ② 児童が、円周の長さを「取り尽くし法」による計算で求めることの限界をどう乗り越えるか。
- ③ 児童が、問題場面（授業の導入場面）に対する意識をもち続けながら活動していくためには、教師のどのような手だてが必要か。

8. 主な学会発表及び論文等

Imai, K. (2016). Importance of situated learning theory in realizing cultural aims of Mathematics education, In. Csikos, C., Rausch, A., & Szitányi, J. (Eds.). *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 178. Szeged, Hungary: PME.

9. 引用・参考文献

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation*. Cambridge:

Cambridge University Press. (佐伯胖訳 (1993).『状況に埋め込まれた学習—正統的周辺参加—』. 産業図書.)
稲垣佳世子・波多野誼余夫 (1998).「学校化された学びのゆがみ」. 佐伯胖他編,『授業と学習の転換』(pp.70-91). 岩波書店.

上野健爾 (2013).『円周率が歩んだ道』. 岩波書店.

小山正孝ほか (2015).『小学算数 5 年下』. 日本文教出版.

清水静海・船越俊介・根上生也・寺垣内政一ほか (2015).『わくわく算数 5』. 啓林館.

竹之内脩・伊藤隆 (2007).『 π — π の計算 アルキメデスから現代まで』. 共立出版.

中央教育審議会 (2016).「幼稚園, 小学校, 中学校, 高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について」(答申).

坪田耕三・金本良通ほか (2015).『小学 算数 5』. 教育出版.

長崎栄三 (2010).「§2 目的・目標論」. 日本数学教育学会編,『数学教育学研究ハンドブック』(pp.24-29). 東洋館出版社.

中村滋 (2013).『円周率 歴史と数理』(数学のかんどころ 22) . 共立出版.

日本数学教育学会教育課程委員会 (2006).『新しい時代の算数・数学教育を目指して—算数・数学科学習指導要領改訂についての要望—』.

野崎昭弘 (2011).『 π の話』. 岩波書店.

橋本吉彦ほか (2015).『新版 たのしい算数 5』. 大日本図書.

平林一栄 (1993).「数学教育の目標」. 数学教育学研究会編,『新数学教育の理論と実際』(pp.24-35), 聖文社.

一松信ほか (2015).『みんなと学ぶ 小学校算数 5年』. 学校図書.

藤井齊亮ほか (2015).『新編 新しい算数 5下』. 東京書籍.

美馬のゆり・山内祐平 (2005).『「未来の学び」をデザインする 空間・活動・共同体』. 東京大学出版会.

文部科学省 (2008).『小学校学習指導要領解説 算数編』. 東洋館出版社.

文部省 (1999).『小学校学習指導要領解説 算数編』. 東洋館出版社.